

Kijelentéslogika

– tananyag, kísérleti változat –

Szerzők:

Csaba Ferenc

Máté András

Mekis Péter

Simonyi András

Zvolenszky Zsófia

Magyarázat:

Félkövr: új, definiálandó, magyarázatra szoruló kifejezések

Aláhúzás: definíció, magyarázat

Dőlt betű: fontos részletek kiemelése

Indentált rész: opcionális mellékszál, kitérő

I. fejezet

A logikát hívhatjuk a **helyes következtetés** tudományának.

Következtetés: kiindulópontként szolgáló állítások alapján újabbakhoz jutunk.

Némely érvelés, **következtetés** működik, mások nem.

A „logika” terminus a mai értelemben az i. sz. 3. században lépett föl; korábban többnyire *dialektikának* (a vitatkozás művészete) nevezték a logika tudományát (bár Arisztotelész inkább *analitikának*, az elemzés tudományának mondta). A „logika” szó görög eredetű, jelzőként Arisztotelész is használta a bizonyítás, ill. a következtetés helyességének minősítésére.

A logika célja, hogy kritériumokat határozzon meg arra, hogy mitől, mikor **helyes** egy következtetés, és mitől, mikor nem.

A **következtetésnek** két fő elemét különböztetjük meg:

Premissza, vagy premisszák – a következtetés kiindulópontja(i) (amiből kiindultunk)

Konklúzió – ahova a következtetés kilyukad: a következtetés zárótétele (amire jutottunk)

A **helyes következtetésben**

ha a premisszák igazak, akkor a konklúzió is automatikusan igaz.

Vagy:

A premisszák igazsága garantálja a konklúzió igazságát.

Vagy:

A premisszák igazsága mellett a konklúzió nem lehet hamis.

[A szemeszter során más, finomított és pontosított definíciókat is fontolóra veszünk.]

Nézzünk néhány példát:

#1.1 HELYES

1. premissza: Marci jön a keddi filmre, vagy Marcsi jön a keddi filmre.
Rövidebben: Marci vagy Marcsi jön a keddi filmre.
2. premissza: Marci nem jön a keddi filmre.
Konklúzió: Marcsi jön a keddi filmre.

#1.2 HELYES

1. premissza: Marci jön a keddi filmre, vagy Marcsi jön a keddi filmre.
Rövidebben: Marci vagy Marcsi jön a keddi filmre.
2. premissza: Ha Marci Marokkóba utazik, akkor nem jön a keddi filmre.
3. premissza: Marci Marokkóba utazik.
Konklúzió: Marcsi jön a keddi filmre.

#1.3 HELYES

1. premissza: Péter tanár.
2. premissza: Péter barátságos.
Konklúzió: Nem minden tanár barátságatlan.

#1.4 HELYES

1. premissza: Minden hal emlős.
2. premissza: Moby Dick hal.
Konklúzió: Moby Dick emlős.

#1.5 HELYES

1. premissza: Minden emberszabású tud bejglit sütni.
2. premissza: Minden nagymama emberszabású.
Konklúzió: Minden nagymama tud bejglit sütni.

Ezek a következtetések egytől egyig helyesek. Aki elfogadja, hogy a premisszák igazak, annak a konklúzió igazságát is el kell fogadnia. Ez a „kell” egy játékszabály; de nem önkényes játékszabály. Biztosak lehetünk abban, hogy ha a premisszák igazak, akkor a konklúzió is igaz. Hogy ez mit jelent, arról szól a logika.

Ajánlott olvasmány: [Lewis Carroll: Mit mondott a teknős Akhillésznek?](#)

#1.1: A következtetés helyességének belátásához nem kell tudnunk, hogy kiről is van szó – ki ez a Marci és Marcsi –, nem kell ismernünk mozibajárési szokásaikat sem. És nem kell tudnunk: melyik keddről, melyik filmről van szó. Mindezekről mit sem kell tudnunk ahhoz, hogy belássuk: *ha* a premisszák igazak, *akkor* a konklúzió is igaz.

Nézzünk példát helytelen következtetésre is:

#1.6 HELYTELEN

1. premissza: Ha Marci jön a keddi filmre, akkor Robi nem jön a keddi filmre.
2. premissza: Robi nem jön a keddi filmre.
Konklúzió: Marci jön a keddi filmre. [lásd alább]

Ez nincs így a #1.6 következtetésnél. Aki a #1.6 következtetést elfogadja helyesnek, annak ezt is el kellene fogadnia:

#1.7 HELYTELEN

1. premissza: Ha cunami-riadó van, akkor Kálmán nem megy strandolni..
 2. premissza: Kálmán nem megy strandolni.
- Konklúzió: Cunami-riadó van.

Párhuzamos megfontolások érvényesek a többi következtetésre, így #1.4-re is:

Jól tudjuk: egyik premissza sem igaz: a halak nem emlősök, a cetekkel ellentétben. De a következtetés szempontjából ezek a részletek lényegtelenek. Ami lényeges: aki a premisszákat igaznak fogadja el, annak egyúttal a konklúziót is igaznak kell tartania. Nem tudunk elképzelni olyan helyzetet, amelyben a premisszák igazak, a konklúzió ellenben hamis.

Egyelőre fogadjuk ezt el, bár sokszor nem egyértelmű, hogy mi elképzelhető, mi nem. Néha olyan dolgok elképzelhetőnek tűnnek, amelyek valójában képtelenségek. Éppen ezért a helyesség vizsgálatakor az elképzelhetőséget csak intuitív, előzetes iránymutatóként említjük. A cél az, hogy később egy sokkal szabatosabb, átláthatóbb definíciót és módszert alakítsunk ki a helyességre.

A fentiekből láthatjuk: *egy következtetés helyességének nem szükséges feltétele az, hogy a premisszák igazak legyenek.*

Sőt, ennél többet is állíthatunk:

Egy következtetés helyességének nem szükséges feltétele az, hogy akár a premisszák, akár a konklúzió igazak legyenek. A következő például helyes következtetés:

#1.8 HELYES

- | | |
|-----------------------------------|-------|
| 1. premissza: Minden hal szivacs. | hamis |
| 2. premissza: Moby Dick hal. | hamis |
| Konklúzió: Moby Dick szivacs. | hamis |

Továbbá: *a premisszák és a konklúzió együttes igazsága elégséges feltételt, garanciát sem határoz meg arra, hogy a következtetés helyes.* A következő például nem helyes következtetés:

#1.9 HELYTELEN

- | | |
|---------------------------------------|------|
| 1. premissza: Minden szamár gerinces. | igaz |
| 2. premissza: Minden szamár emlős. | igaz |
| Konklúzió: Minden emlős gerinces. | Igaz |

#1.9 premisszáinak elfogadása nem vonja maga után a konklúzió elfogadását. Bár mindhárom állítás igaz, alakulhatott volna úgy is, hogy a premisszák igazak, ellenben az emlősök fejlődéstörténete kicsit másképpen alakul: mondjuk bizonyos emlős fajokban visszafejlődik és eltűnik a gerincoszlop. Vagyis: a konklúzió *lehetne* hamis a premisszák igazsága mellett is. Ez az egyik teszt, ami alapján beláthatjuk: helytelen következtetésről van szó. Ezt hívjuk **cáfoló ellenpéldának**. Felmerül egy másik lehetséges teszt is: keressünk egy olyan **behelyettesítését** a következtetésnek, amelyben a premisszák igazak, a konklúzió pedig hamis: #1.9-re például felmerülhet a következő:

#1.10 HELYTELEN

- | | |
|-------------------------------------|------|
| 1. premissza: Minden szamár makacs. | igaz |
|-------------------------------------|------|

2. premissza: Minden számár emlős. igaz
Konklúzió: Minden emlős makacs. hamis

Pontosan mi is számít megfelelő behelyettesítésnek? Erre a kérdésre hamarosan választ kapunk.

Láthattuk tehát: *a helyesség nem attól függ, hogy igaz premisszákkal, konklúzióval van-e dolgunk. Akkor mitől függ a helyesség?*

#1.1-nél felmerült már, hogy a következtetés helyessége szempontjából nem számít, hogy ki is az a Marci. A következtetésben „Marci” helyett írhatnánk „Berci”-t is, és ugyanúgy helyes maradna:

#1.11 HELYES

1. premissza: Berci jön a keddi filmre, vagy Marcsi jön a keddi filmre.

Rövidebben: Berci vagy Marcsi jön a keddi filmre.

2. premissza: Berci nem jön a keddi filmre.

Konklúzió: Marcsi jön a keddi filmre.

Ráadásul a „Marci” néven kívül más kifejezéseket is felcserélhetünk anélkül, hogy a következtetés helyességét befolyásolnánk. Ilyen a „Marcsi”, sőt az „jön a keddi filmre” mindegyik részlete. Írhatnánk helyettük „Borcsá”-t, és „alszik a szombati meccsen”, és a következtetés ugyanúgy helyes maradna:

#1.12 HELYES

1. premissza: Berci alszik a szombati meccsen, vagy Borcsa alszik a szombati meccsen.

Rövidebben: Berci vagy Borcsa alszik a szombati meccsen.

2. premissza: Berci nem alszik a szombati meccsen.

Konklúzió: Borcsa alszik a szombati meccsen.

A szocialista időkben számos magyar vicc szólt a jereváni rádióról:

– Igaz-e, hogy Moszkvában Mercedeseket osztogatnak?

– A hír igaz – közli a jereváni rádió –, azzal az apró korrekcióval, hogy nem Moszkvában, hanem Leningrádban, nem Mercedeseket, hanem Zsigulikat, és nem osztogatnak, hanem fosztogatnak.

A „jereváni rádió”, mint szófordulat, úgy vonult e a köztudatba, mint amely lényegi különbséget apró módosításként tüntet föl.

A logikai helyesség kérdése egy ponton osztja a jereváni rádió hozzáállását: a következtetések helyessége szempontjából is mindegy, hogy Moszkváról van szó, vagy Leningrádról, Mercedesekről, vagy Zsigulikról, osztogatásról, vagy fosztogatásról. Más szóval: *a helyesség kérdése tárgysemleges.*

Ha végigzongorázzuk a lehetőséget skáláját, kiderül, hogy a „vagy” és a „nem” azok a kifejezések, amelyeket nem helyettesíthetünk más kifejezéssel, az összes többi felcserélhető anélkül, hogy a következtetés helyességét befolyásolnánk.

A „vagy” – „ha” felcserélés helytelen következtetést eredményez:

#1.13 HELYTELEN

1. premissza: Marci jön a keddi filmre, ha Marcsi jön a keddi filmre.
 2. premissza: Marci nem jön a keddi filmre.
- Konklúzió: Marcsi jön a keddi filmre.

A „nem” – „talán” felcserélés szintén helytelen következtetést eredményez:

#1.14 HELYTELEN

1. premissza: Marci jön a keddi filmre, vagy Marcsi jön a keddi filmre.
 2. premissza: Marci talán jön a keddi filmre.
- Konklúzió: Marcsi jön a keddi filmre.

#1.13 és #1.14 egyaránt helytelen következtetés, hiszen elfogadhatjuk a premisszák igazságát anélkül, hogy a konklúziót igaznak tartanánk. A premisszák igazsága mellett a konklúzió nem lesz automatikusan igaz.

Ebből kitűnik, hogy az #1.1 következtetés helyessége abban rejlik, hogy milyen **logikai szavak** (adott esetben éppen kötőszavak) találhatóak a premisszában és a konklúzióban: hogy az első premisszában „vagy”, van, és a második premissza tagadja az első egyik felét. Ezek a *nem cserélhető* alkotórészek. És nem csak #1.1 helyessége függ ettől. Ugyanez mondható el például #1.11-ről és #1.12-ről is. Azt mondhatjuk: #1.1, #1.11 és #1.12 **logikai szerkezete** megegyezik, azaz a nem cserélhető alkotórészek ugyanazok és ugyanazt a szerepet is töltik be. A többi alkotórész szabadon cserélgethető, legalábbis addig a határig, hogy a mondatok nyelvtani helyessége megmaradjon¹ akár betűkkel is helyettesíthetjük őket. Ezek a betűk mindig egy-egy tetszőleges odaillő kifejezés helyett állnak. Ezzel a módszerrel mindhárom következtetés felírható sematikusán így:

#1.15 HELYES

- | | |
|---------------|--------------|
| 1. premissza: | A vagy B |
| 2. premissza: | nem A |
| Konklúzió: | B |

*A és B tetszőleges mondatokat helyettesítenek. Tehát egy következtetés logikai szerkezete, vagyis a **következtetési séma** az, amitől függ, hogy a következtetés helyes-e, vagy sem.*

¹ Ezt a későbbiekben kissé finomítanunk kell; a logika nyelvtana és a közönséges értelemben vett nyelvtan nem teljesen egyezik meg. Most csak egy példával érzékeltetve, miről van szó: A 'Néhány lány énekel' mondatban a logikai szerkezet megváltoztatása nélkül nem cserélhetjük ki a 'néhány lány' kifejezést arra, hogy 'Kati', de arra sem, hogy 'három lány'. Ez így is van jól: hiszen a logikai szerkezet szempontjából számít, hogy az egyik premisszánk így hangzik: "néhány lány énekel", és nem pedig így: "Kati énekel". Más következtetési sémák lesznek helyesek a két esetben.

Egy következtetés akkor és csak akkor helyes, ha a logikai szerkezete/következtetési sémája helyes.

Egy következtetési séma akkor és csak akkor helyes, ha nem lehetséges olyan behelyettesítése, amelyben az összes premissza igaz, a konklúzió pedig hamis.

#1.13 következtetési sémája például helytelen:

#1.16 HELYTELEN

1. premissza: A , ha B
2. premissza: $\text{nem } A$
Konklúzió: B

Ezt úgy mutathatjuk meg, hogy keresünk olyan behelyettesítést, amelynél igaz premisszákat és hamis konklúziót kapunk.

Például:

#1.17 HELYTELEN

1. premissza: Moby Dick kopoltyús, ha Moby Dick hal. igaz
(Másképpen: Ha Moby Dick hal, akkor kopoltyús.)
2. premissza: Moby Dick nem kopoltyús. igaz
Konklúzió: Moby Dick hal. hamis

Könnyen láthatjuk viszont, hogy #1.8 logikai szerkezete helyes:

#1.18 HELYES

1. premissza: Minden $P \rightarrow Q$
2. premissza: $x \rightarrow P$
Konklúzió: $x \rightarrow Q$

Akárhogy is helyettesítjük be x -et, P -t és Q -t, nem fog sikerülni a két premisszát igazzá és a konklúziót hamissá tenni. Ugyanis ha találtunk egy olyan x -et, amelyre a konklúzió hamis és a második premissza igaz, azaz ez az $x \rightarrow P$, de nem Q , akkor máris van egy ellenpéldánk azzal szemben, aki azt állítja, hogy minden, ami P , az Q .

A helyes következtetések konklúzióját hívjuk következménynek.

A következtetés helyessége tehát a következtetés logikai szerkezetétől függ. A logikai szerkezet függ a következtetésekben szereplő kijelentések – premisszák és konklúzió – logikai szerkezetétől. Az állítások logikai szerkezete pedig részben attól függ, hogy milyen logikai szavakat – más néven logikai konstansokat – tartalmaznak (pl. “... vagy ...”, “nem ...”, “minden...”).

A következtetési sémák elvonatkoztatnak az állítások szerkezetének minden részletétől, kivéve a logikai szavakat.

További logikai szavak: “ha... akkor...”, “... akkor és csak akkor ha ...”, “van olyan ...”, “szükségszerű, hogy...” és még számos másik.

Fontos, hogy az itt felsoroltak közül a “minden ...” és a “van olyan ...” kifejezések köznevekhez, főnévi kifejezésekhez kapcsolódnak (mindkettőbe behelyettesíthető pl. “hal”, vagy “nyugdíjas nagymama”). A többi viszont mondathoz kapcsolódik, némelyik több mondatot köt össze. Az ilyen logikai szavakat hívjuk **konnektívumnak**, vagy **mondatfunktornak**.

*Más és más **logikai rendszert** kapunk attól függően, hogy mely kifejezéseket tekintünk logikai szavaknak és tekintünk a logikai szerkezet részének.*

Ez a kurzus egy bizonyos logikai rendszert vizsgál, a kijelentés**logikát** (propositional logic). A kijelentéslogika kizárólag kötőszavakat kezel logikai szóként, de azok közül sem mindegyiket: a fent említettek közül nem foglalkozik például a “szükségszerű, hogy...” kötőszóval, ami már egy másik logikai rendszerben, az ún. **modális logikában** jelenik meg mint konnektívum. Az olyan logikai szavak, amelyek nem mondatokhoz kapcsolódnak, hanem mondatok bizonyos részeihez, mint például a “minden ...” és a “van olyan ...”, az ún. **predikátumlogikában** jelennek meg logikai szóként. Az állításlogika az egyik legalapvetőbb logikai rendszer, amelyre épül pl. a predikátumlogika és a modális logika is.

#1.18 ugyan helyes következtetési séma, de nem következtetési sémája az kijelentéslogikának. A kijelentéslogika a következtetési sémáknak csak egy bizonyos részével foglalkozik, azokkal amelyekben a kijelentéslogika logikai szavai szerepelnek. Ezeket a logikai szavakat vizsgáljuk meg közelebbről a következő alkalommal. A kijelentéslogika hatókörébe tartozik a helyes #1.15 következtetési séma, valamint a helytelen #1.16 következtetési séma: a kijelentéslogika célja, hogy módszereket biztosítson arra, hogy kimutassuk és bizonyítsuk #1.1 helyességét és #1.13 helytelenségét. És ehhez, a logikai szavakra, valamint a logikai szerkezetre kell összpontosítanunk, és – a jereváni rádióval egyetemben – figyelmen kívül hagyjuk az osztogatás/fosztogatás, Mercedes/Zsiguli közti különbségeket.

A sztoikus logika, és benne az első kijelentéslogikai elmélet megalapítója, Khrüszipposz (Kr. e. 281-208) állítólag úgy tartotta, hogy egyes kijelentéslogikai következtetési sémákat, például a mi #1.1 következtetésünk sémáját még a kutyák is tudják alkalmazni. Legalábbis Sextus Empiricus, Kr. u. 100 körüli szkeptikus szerző így tudósít:

„Khrüszipposz ... azt állítja, hogy a kutya az ötödik ... bizonyítatlan szillogizmust is alkalmazza [ez nem más, mint az #1.1 következtetés sémája], mert amikor egy hármas úthoz ér, miután kiszimatolt két utat, amelyen a vad nem járt, anélkül, hogy a harmadikat szimatolná, tüstént ezen az úton igyekszik tovább a vad után.” (A *pürrhonizmus alapvonalai* I. 69, Lautner Péter fordítása alapján.)