V. fejezet

Levezetések a kijelentéslogikában I. : axiomatikus felépítés

A következtetések helyességének kérdését két módon közelíthetjük meg. Először is egy adott következtetéssel kapcsolatban feltehetjük azt a kérdést, hogy helyes-e, vagy sem. Ennek megválaszolására már ismerünk két módszert is: az igazságtáblázatokat és az analitikus táblázatokat. A másik lehetséges kérdés az, hogy ha csak a premisszák adottak, milyen konklúziókat vonhatunk le belőlük helyesen. Erre is elkezdtük már a válasz keresését, hiszen az első három fejezetben találkoztunk egy sor helyes következtetési szabállyal. Ha egy ilyetet alkalmazunk olyan premisszákra, amelyekre alkalmazható (azaz a premisszák logikai szerkezete megfelel a sémának), akkor biztosan helyes lesz a következtetésünk. De alkothatunk-e rendszert ezekből a szabályokból? Vajon premisszáink *minden* következményét **levezet**hetjük-e[1] szabályaink segítségével? Erre a kérdésre ismét kétféle módszerrel kereshetünk választ. Mind a kettőnek az a célja, hogy megadja egy adott logikai elméleten (esetünkben a kijelentéslogikán) belül az összes elvégezhető helyes levezetés szabályait. Az első módszer, amit bemutatunk, kevésbé szemléletes, viszont technikailag egyszerűbb, és emlékeztet a matematikából ismert axiomatikus módszerre. Ebben azt, hogy mit tekintünk szabályszerű levezetésnek, nem tisztán csak levezetési szabályok segítségével adjuk meg, hanem a helyes levezetésre vonatkozó tudásunk egy részét logikai axiómák formájában adjuk elő. Az ilyen típusú levezetési rendszereket nevezzük az alapító atyákról Frege-, vagy Frege-Hilbert-stílusú kalkulusnak.

5.1 Frege-stílusú kalkulus

Axiómasémák

Kondicionális sémák

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

Negációs sémák

(A3) $(A \supset B) \supset ((A \supset {\sim} B) \supset {\sim} A)$

(A4) ${\sim}{\sim} A \supset A$

Konjunkció bevezetése

(A5) $(A \supset (B \supset (A \,\&\, B))$

Konjunkció eltávolítása

(A6) $(A \,\&\, B) \supset A$

(A7) $(A \,\&\, B) \supset B$

Diszjunkció bevezetése

(A8) $(A \supset (A \vee B))$

(A9) $(B \supset (A \vee B))$

Diszjunkció eltávolítása

(A10) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

Bikondicionális bevezetése

[1] Levezetésen nem mást értünk, mint következtetések sorozatát. A metszetszabályra, avagy tranzitivitásra hivatkozva (l. I. fejezet) ezeket mindig tekinthetjük egyetlen következtetésnek is.

(A13) $(A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \equiv B))$

Bikondicionális eltávolítása

(A11) $(A \equiv B) \supset (A \supset B)$

(A12) $(A \equiv B) \supset (B \supset A)$

Levezetési szabály

(MP) $A, A \supset B \vdash B$

Levezetési példák

1. Megmutatjuk, hogy ha A tetszőleges formula, akkor $A \supset A$ tautológia.

Az (A1) axiómasémában alkalmazzuk az alábbi helyettesítést:

$A \quad | A$

$B \quad | A \supset A$

Így az alábbi sémát kapjuk:

(1) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$

Most (A2)-ben alkalmazzuk az alábbi helyettesítést:

$A \quad | A$

$B \quad | A \supset A$

$C \quad | A$

Így az alábbi sémához jutunk:

(2) $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$

Az (1) és (2) sémákból (MP)-vel következik

(3) $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$

Most (A1)-re alkalmazzuk az

$A \quad | A$

$B \quad | A$

$C \quad | A$

behelyettesítést. Így kapjuk a következőt:

(4) $A \supset (A \supset A)$

(3)-ból (MP)-vel kapjuk a keresett sémát:

(5) $A \supset A$

[1. más jelölésekkel:

(A1) $A \supset (\quad B \quad \supset A)$

(1) $\overline{A} \supset (\overline{(A \supset A)} \supset \overline{A})$

(A2) $(A \supset (\quad B \quad \supset C)) \supset (\; A \supset \quad B \quad) \supset \; A \supset C)$

$(\qquad\qquad ($

(2) $(\overline{A} \supset (\overline{(A \supset A)} \supset \overline{A})) \supset (\; \overline{A} \supset \overline{(A \supset A)} \;) \supset \; \overline{A} \supset \overline{A})$

$(\qquad\qquad ($

(1) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$

(2) $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \quad \supset \quad ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$

(3) $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(4) $\overline{A} \supset (\overline{A} \supset \overline{A})$

(4) $A \supset (A \supset A)$

(3) $(A \supset (A \supset A)) \quad \supset \quad (A \supset A)$

(5) $A \supset A$

Talán így átláthatóbb lenne a gyakorlatlan szem számára, hogy mi történik.]

2. Most lássunk egy valamivel meglepőbb eredményt! Megmutatjuk, hogy ha A tetszőleges formula, akkor $(\sim A \supset A) \supset A$ tautológia. (Némi pongyolasággal ezt a sémát szokták *consequentia mirabilisnek* nevezni; hagyományosan a *consequentia mirabilis* nem kijelentéstípus, hanem következtetési szabály.) Egy köznyelvi példa a sémának megfelelő kijelentésre: *Ha akkor is baj van, ha nincs baj, akkor bizony baj van.* (Az olvasóra bízzuk, hogy elfogadja-e tautológiának ezt a kijelentést; mindenesetre ha a klasszikus logika törvényeit követve ítéljük meg, tautológiának bizonyul.)

Ahhoz, hogy a $(\sim A \supset A) \supset A$ sémát levezethessük (MP) segítségével, mindenekelőtt le kell vezetnünk egy kondicionális sémát, amelynek utótagja $(\sim A \supset A) \supset A$, utótagja pedig maga is levezethető séma. A kondicionálisra és a negációra vonatkozó négy axiómaséma közül (A1) és (A4) nem látszik alkalmasnak erre a célra. Némi próbálkozás után meggyőződhetünk róla, hogy az (A2)-be történő behelyettesítés reménytelenül elbonyolítja a feladatunkat. (A3) segítségével viszont a levezetés igen egyszerűnek bizonyul: ha A-t meghagyjuk A-nak,

Megjegyzések

Történetileg az első kijelentéslogikai kalkulust Gottlob Frege alkotta meg, egy tágabb – predikátumlogikai – levezetési rendszer részeként. Frege csak két konnektívumot szerepeltetett logikai nyelvében: a negációt és a kondicionálist; így neki az (A5)-(A13) sémákra nem volt szüksége. (A3) helyett nála két séma szerepelt:

(A3′) $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$

(A3″) $A \supset \sim \sim A$

Az általunk bevezetett kalkulus tehát annyiban elegánsabb Fregéénél, hogy három helyett csak két negációs séma szerepel benne. Még elegánsabb rendszert kapunk a következő sémával:

(A3‴) $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

Az (A1), (A2) és (A3‴) sémák együttesen egyenértékűek a mi kalkulusunk (A1), (A2), (A3) és (A4) sémáival. (Lásd: Frege: *Logikai vizsgálódások*. Osiris, 2000. 51-65.o. A fregei kalkulus jelen kibővített változata kisebb módosításokkal – jellemzően a bikondicionális sémák nélkül, és a predikátumkalkulus részeként – számos logikai kézikönyvben megtalálható: pl. S. C. Kleene: *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand, 1952. **??**.o.; E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*.

Wadsworth, 1987. 37sk.o.; S. Buss: “Introduction to proof theory”. In: *Handbook of Proof Theory*. Elsevier, 1998. 5.o.; vagy magyarul Dragálin Albert és Buzási Szvetlána: *Bevezetés a matematikai logikába*. Kossuth Egyetemi Kiadó, 2000. 110.o.)