10. fejezet

Intuicionista logika II. Szemantika

Az intuicionista logika formális szemantikái közül a legszemléletesebb és legrugalmasabb rendszerrel, a „konstruktív–episztemikus" Kripke-féle szemantikával ismerkedünk meg. A fejezet sava-borsa a helyesség és teljesség bizonyítása lesz.

10.1. Az intuicionista logika Kripke-szemantikája

Mint emlékszünk, $\mathbb{M}$ jelöli a mondatbetűk halmazát. A propozicionális logika formális szemantikájában mindössze egy $\mathbb{M} \to \{0, 1\}$ függvényt kellett megadnunk, amelyet aztán – a jól ismert szabályok alapján – minden mondatra kiterjesztettünk. *Érvényesnek* neveztük azokat a mondatokat, amelyek minden ilyen függvény esetén igazra (azaz 1-re) értékelődnek.

Az intuicionista logika *Saul Kripke* nevéhez fűződő formális szemantikájának alapja is az $\mathbb{M}$-en értelmezett függvények lesznek, ezek azonban a $\{0, 1\}$ halmaznál valamivel bonyolultabb struktúrába érkeznek.

A formális kifejtés előtt lássuk az intuitív motivációt. Képzeljünk elv egy ideális szubjektumot, aki alkalmanként azzal köti le magát, hogy leltárt készít tudásáról: a leltározás α pillanatában (napján) sorra veszi, hogy mely alapvető mondatokról ($\mathbb{M}$ mely elemeiről) tudja, hogy igazak. Tegyük fel, hogy az illető irigylésre méltóan következetes: ha valamikor leltárba vette például az $\mathfrak{m}$ mondatot, akkor $\mathfrak{m}$ minden későbbi alkalommal is szerepel a listáján, a $\perp$ mondat visuont sohasem krül fel a listára.

A P-vel jelölt lehetséges leltár-időpontok között bevezethetjük a „nem korábbi, mint" relációt: ha $\alpha, \beta \in \mathsf{P}$, akkor $\alpha \leq \beta$ jelöli azt, hogy α nem korábbi, mint β. Világos, hogy $\alpha \leq \alpha$ minden $\alpha \in \mathsf{P}$ esetén teljesül. Feltesszük továbbá, hogy „emberünk" egyszerre mindig csak egy listát készít, azaz ha $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \alpha$ egyaránt fennáll, akkor $\alpha = \beta$, valamint hogy a „nem korábbi, mint" reláció tranzitív: ha $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \gamma$, akkor teljesül $\alpha \leq \gamma$ is. Nem ragaszkodunk ugyanakkor ahhoz, hogy bármely két lehetséges leltáridőpont közül az egyik „nem korábbi" legyen, mint a másik. Egy adott α leltárnap után az illető egyaránt utánajárhat az m_1 vagy az m_2 mondatnak; ha a β napon az m_1-et, a γ napon pedig az m_2-t vette fel a listájára, akkor előfordulhat, hogy β és γ egyik irányban sem állnak $\leq$-relációban (a „nem korábbi, mint" reláció tehát nem libeáris) Ha most $f : \mathbb{M} \to \wp P$ az a függvény, amely megadja, hogy az egyes mondatbetűk melyik leltárnapokon szerepelnek a listán, akkor az ideális szubjektum következetessége a következőket jelenti: (i) tetszőleges $m \in \mathbb{M}$ esetén $\perp \notin f(m)$ és (ii) tetszőleges $m_1, m_2 \in \mathbb{M}$ esetén, ha $m_1 \leq m_2$, akkor $f(m_1) \subseteq f(m_2)$.

A formális modell a következő. *Kripke-féle keretstruktúrának* nevezzük a $\mathcal{K} = \langle P, \leq \rangle$ rendezett párokat, amelyekben P nemüres halmaz, $\leq$ pedig egy P-n értelmezett részbenrendezés (reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció). [A P halmaz elemeire mint leltárnapokra hivatkozunk; azt pedig, hogy $\alpha \in f(m)$, alkalmanként így mondjuk: az α leltárnapon m felkerül a listára.] A $\mathcal{K}$ keretstruktúrán alapuló modellnek nevezzük azokat az $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{K}, f \rangle$ párokat – vagyis $\mathfrak{M} = \langle P, \leq, f \rangle$ rendezett hármasokat –, amelyekben f a mondatbetűk „következetes" *értékelése,* azaz olyan $\mathbb{M} \to \wp P$ függvény, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $m, m_1, m_2 \in \mathbb{M}$ esetén $\perp \notin f(m)$ és $m_1 \leq m_2 \Rightarrow f(m_1) \subseteq f(m_2)$.

Azt, hogy az $\alpha \in P$ leltárnapon az $m \in M$ mondat szerepel a listán, $\alpha \Vdash m$ jelöli. A $\Vdash$ relációt ezután valamennyi mondatra kiterjesztjük, az alábbi szabályok szerint:

- $\alpha \Vdash \perp$ sohasem áll fenn (azaz $\alpha \nVdash \perp$ minden $\alpha \in P$ esetén);
- ha $m \in \mathbb{M}$, akkor $\alpha \Vdash m \Leftrightarrow \alpha \in f(m)$;
- $\alpha \Vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall\beta \geq \alpha$ esetén, ha $\beta \Vdash \mathcal{A}$, akkor $\beta \Vdash \mathcal{B}$;
- $\alpha \Vdash \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \Leftrightarrow \alpha \Vdash \mathcal{A}$ és $\alpha \Vdash \mathcal{B}$;
- $\alpha \Vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \alpha \Vdash \mathcal{A}$ vagy $\alpha \Vdash \mathcal{B}$;
- $\alpha \Vdash \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall\beta \geq \alpha$ esetén $\beta \nVdash \mathcal{A}$.

A konjunkció és az alternáció értelmezése lényegében a szokásos (bár az utóbbira vonatkozóan lesz egy érdekes eredményünk), a kondicionális és a negáció azonban a klasszikus esethez képest többet követel: ezeknek a fennállásához nem csupán az adott „leltárnapot", de az utána következőket is figyelembe kell vennünk. Vegyük észre, hogy egy kondicionális az α napon leltárba vehető úgy is, hogy a leltárban sem az előtagja, sem az utótagja nem szerepel.

Utolsó megfigyelésünk a Kripke-féle szemantika egy fontos vonására mutat rá: az egyes leltárnapokon nem kell feltétlenül minden mondatról döntenünk, attól, hogy az m mondat az α leltárnapon nem kerül fel a listára, egy későbbi β napon még felkerülhet.

10.1.1. Mutassuk meg, hogy ha $\neg A$-t $A \supset \perp$-ként értelmezzük, akkor a negációra vonatkozóan éppen azt kapjuk, amit az utolsó pont mond.

10.1.2. Igazoljuk, hogy a következetesség megőrződik: tetszőleges A mondat és $\alpha, \beta \in P$ esetén, ha $\alpha \Vdash A$ és $\alpha \leq \beta$, akkor $\beta \Vdash A$.

Az igazságnak a szemantikánk szerint fokozatai vannak. Azt mondjuk, hogy az A mondat az $\mathfrak{M} = \langle P, \leq, f \rangle$ *modellben igaz* – jelölés: $\mathfrak{M} \models A$ –, ha minden $\alpha \in P$ esetén $\alpha \Vdash A$.

Az A mondat a $\mathcal{K} = \langle P, \leq \rangle$ *keretstruktúrában igaz* – jelölés: $\mathcal{K} \vDash A$ –, ha minden $\mathcal{K}$-n alapuló $\mathfrak{M}$ modellben igaz. Végül A-t *érvényesnek* (*logikai igazságnak*) nevezzük, ha minden keretstruktúrában igaz.

Az érvényesség nagyon erős követelmény: ahhoz, hogy egy mondat érvényes legyen, ahhoz *bármely* keretstruktúrán alapuló *bármely* modell *bármelyik* leltárnapján szerpelnie kell a listán. Ugyanez visszájáról: ha azt akarjuk bebizonyítani, hogy egy $\mathcal{A}$ mondat nem érvényes, elég, ha mutatunk *egy* P halmazt *egy* $\leq$ relációval és *egy* „következetes” $f : \mathbb{M} \to \wp P$ függvénnyel, valamint *egyetlen* $\alpha \in P$ leltárnapot, amelyre $\alpha \nVdash \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$ kondicionális például érvényes: bármely modell bármely α „leltárnapján” biztosak lehetünk abban, hogy ha egyszer $\mathcal{A}$-t felvesszük a listára, akkor $\mathcal{A}$-t felvesszük a listára...

Könnyen igazolható, hogy az (1)–(10) és az (F) sémák minden behelyettesítése, azaz minden axióma érvényes; érvényesek tovább az alternáció és a konjunkció kommutativitását, asszociativitását és – egymáshoz viszonyított – disztributivitását kimondó axiómák is.

10.1.3. Igazoljuk. Mutassuk meg tovább, hogy a modus ponens továbbörökíti az érvényességet: ha $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ és $\mathcal{A}$ érvényesek, akkor $\mathcal{B}$ is az.

10.1.4. Igazoljuk az 5.4.4. feladat előtt megadott sémák közül háromnak az érvényességét. [A teljességi tétel bizonyítása után ezzel a levezethetőségük is bizonyítottá válik; igaz ugyan, hogy a levezethetőséget nem maguk a levezetések támasztják alá.]

A következő két alfejezetből (az is) kiderül, hogy az érvényes mondatok pontosan azok, amelyek az intuicionista logikában levezethetők.

10.2. Helyesség. Klasszikus törvények cáfolatai

Legyen Γ mondatok egy halmaza, $\mathfrak{m}$ pedig egy mondat. A $\Gamma \vDash \mathfrak{m}$ **szemantikai következményrelációt** a következőképpen értelmezzük: *minden olyan Kripke-struktúrában, amelyen Γ minden eleme érvényes, $\mathfrak{m}$ is az.*

A szintaktikai és a szemantikai következményreláció közötti intim kapcsolat egyik fele a **helyesség**:

10.2.1. Tétel. *Tetszőleges Γ mondathalmaz és $\mathfrak{m}$ mondat esetén* $\Gamma \vdash \mathfrak{m} \Rightarrow \Gamma \vDash \mathfrak{m}$.

BIZONYÍTÁS: Az előző alfejezet utolsó feladatával a tételt lényegében már beláttuk. Tegyük fel ugyanis, hogy $\mathfrak{m}$ levezethető Γ-ból, tovább, hogy Γ minden eleme érvényes. Az $\mathfrak{m}$ mondat levezetése olyan mondatsorozat, amelynek utolsó tagja $\mathfrak{m}$, és amelynek minden tagja vagy Γ eleme, vagy axióma, vagy két megelőző tagból modus ponensszel következik. Feltevéseink és az 5.5.3. feladat szerint ekkor a sorozat minden tagja érvényes, így speciálisan $\mathfrak{m}$ is. □

A tétel a visszájáról fogalmazva így szól: tetszőleges Γ mondathalmaz és $\mathfrak{m}$ mondat esetén $\Gamma \nvDash \mathfrak{m} \Rightarrow \Gamma \nvdash \mathfrak{m}$. Speciálisan (a $\Gamma = \varnothing$ esetben): ha egy A mondat nem érvényes, akkor nem is vezethető le (az (1)–(10) axiómák alapján).

Könnyen belátható: a kizárt harmadik törvénye az (1)–(10) axiómákból nem vezethető le. Tekintsük ugyanis azt a modellt, amelyben

$$\begin{tikzcd} \beta \vDash m \\ \alpha \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(A nyíl azt jelöli, hogy β nem korábbi – esetünkben nyilván „későbbi” – időpont, mint α; minden pontban jelöljük, hogy benne melyik mondatbetű „igaz”, α-ban tehát az „ideális szubjektum” még nem vett fel semmit a listájára.) Ekkor $\alpha \nVdash m$ és $\alpha \nVdash \neg m$, így aztán $\alpha \nVdash m \vee \neg m$. Ugyanez a modell cáfolja az $\neg\neg A \supset A$ séma érvényességét is.

A következő feladatokból kiderül, hogy számos klasszikusan érvényes séma van, amely az intuicionista logikában már nem vezethető le (ezek „klasszikus levezetése” tehát erősen támaszkodik a kizárt harmadik törvényére).

10.2.1. Igazoljuk, hogy a

$$\begin{tikzcd} \beta \vDash m & & \gamma \vDash n \\ & \alpha \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

modellben

$$\alpha \nvDash \neg(m \,\&\, n) \supset (\neg m \vee \neg n) \text{ és}$$
$$\alpha \nvDash (m \supset n) \vee (n \supset m).$$

10.2.2. Igazoljuk, hogy a

$$\begin{tikzcd} \beta \vDash m, n \\ \alpha \arrow[u] \end{tikzcd}$$

modellben

$$\alpha \nvDash (m \supset n) \supset (\neg m \vee n).$$

10.2.3. Igazoljuk, hogy a

$$\begin{tikzcd} \beta \vDash m, n \\ \alpha \vDash n \arrow[u] \end{tikzcd}$$

modellben

$$\alpha \nvDash (\neg m \supset \neg n) \supset (m \supset n).$$

10.3. Teljesség

A teljességi tétel a helyességi tétel megfordítása: ha egy m mondat a Γ mondathalmaz szemantikai következménye, akkor m le is vezethető Γ-ból.

10.3.1. Tétel. *Tetszőleges Γ mondathalmaz és m mondat esetén* $\Gamma \vDash m \Rightarrow \Gamma \vdash m$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz néhány fogalomra. Azt mondjuk, hogy egy Δ mondathalmaz *konzisztens,* ha $\Delta \nvdash \bot$, Δ inkonzisztens, ha nem konzisztens.

10.3.1. Mutassuk meg, hogy definíciónk ekvivalens a következővel: Δ konzisztens, ha van legalább egy m mondat, amelyre teljesül, hogy $\Delta \nvdash m$.

Egy mondathalmaz tehát inkonzisztens, ha belőle minden mondat levezethető.

Azt mondjuk, hogy a Δ mondathalmaz (*propozicionálisan*) *szaturált,* ha egy alternáció csak valamelyik tagjával együtt lehet belőle levezethető, azaz ha bármely m_1, m_2 mondat esetén fennáll a következő: amennyiben $\Delta \vdash m_1 \vee m_2$, úgy $\Delta \vdash m_1$ és $\Delta \vdash m_2$ közül legalább az egyik szintén teljesül.

Azt mondjuk, hogy a Δ mondathalmaz *deduktívan zárt,* ha minden következménye eleme, azaz minden m mondat esetén $\Delta \vdash m \Rightarrow m \in \Delta$.

10.3.2. Mely mondatok az inkonzisztens, deduktívan zárt mondathalmazok elemei?

A teljességi tétel bizonyításának kulcslépését a következő állítás adja, amely a már megismert Lindenbaum-lemma intuicionista logikabeli megfelelője.

10.3.2 Lemma. *Legyen Γ mondatok egy halmaza, m pedig egy mondat. Ha $\Gamma \nvdash m$, akkor van olyan deduktívan zárt, szaturált Γ^* mondathalmaz, amelyre teljesül, hogy* (1) $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, *és* (2) $m \notin \Gamma^*$.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel tehát, hogy $\Gamma \nvdash m$; tekintsük a nyelv mondatainak egy $m_0, m_1, m_2 \ldots$ felsorolását. Definiáljunk egy mondathalmazokból álló $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ sorozatot a következőképpen. Legyen $\Gamma_0 = \Gamma$. Ha Γ_k-t már definiáltuk, akkor a Γ_{k+1} értelmezésekor három esetet különböztetünk meg:

(a) Ha $\Gamma \cup \{m_k\} \vdash m$, akkor legyen $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k$.

(b) Ha $\Gamma \cup \{m_k\} \nvdash m$ és m_k nem alternáció, akkor legyen $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{m_k\}$.

(c) Ha $\Gamma \cup \{m_k\} \nvdash m$ és $m_k = n_1 \vee n_2$, akkor könnyen belátható, hogy $\Gamma \cup \{m_k, n_1\} \nvdash m$, vagy $\Gamma \cup \{m_k, n_2\} \nvdash m$. Az első esetben legyen $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{m_k, n_1\}$, a másodikban pedig legyen $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{m_k, n_2\}$.

Legyen végül

$$\Gamma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i.$$

Világos, hogy $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Tetszőleges k természetes számra fennáll, hogy $\Gamma_k \nvdash m \Rightarrow \Gamma_{k+1} \nvdash m$, így (mivel $\Gamma_0 \vdash m$) minden k-ra $\Gamma_k \nvdash m$, aminek következtében $\Gamma^* \nvdash m$. Annak igazolása, hogy Γ^* deduktívan zárt és szaturált, nem jelent problémát. $\square$

10.3.3. Fejezzük be a bizonyítást.

Legyen most Γ tetszőleges konzisztens mondathalmaz. Értelmezzük a Γ-hoz rendelt **kanonikus modellt** a következőképpen:

$$\mathfrak{M}_\Gamma = \langle P_\Gamma, \subseteq, f_\Gamma \rangle,$$

ahol P_Γ a Γ deduktívan zárt, szaturált bővítéseinek halmaza, f pedig olyan függvény, amely minden $P_\Gamma \ni \Delta$-hoz a benne szereplő mondatbetűk halmazát rendeli. Az f függvény a szokásos szabályok szerint rögzíti a P_Γ elemei és a mondatok közötti $\Vdash$ relációt.

A teljességi tétel a következő lemma bizonyításával elérhető közelségbe kerül:

10.3.3 Lemma. *Legyen Γ konzisztens mondathalmaz, $M_\Gamma = \langle P_\Gamma, \subseteq, f_\Gamma \rangle$ pedig a Γ-hoz rendelt kanonikus modell. Ekkor*

1. *tetszőleges $\Delta \in P_\Gamma$ és m mondat esetén $\Delta \Vdash m \Leftrightarrow m \in \Delta$, és*
2. *bármely m mondatra teljesül, hogy $\mathfrak{M}_\Gamma \models m \Leftrightarrow \Gamma \vdash m$; speciálisan: minden $n \in \Gamma$ esetén $\mathfrak{M}_\Gamma \models n$.*

Bizonyítás: (1)-et „strukturális indukcióval" bizonyíthatjuk. A $\supset$-re vonatkozó indukciós lépés igazolásához tegyük fel, hogy az állítás p és q esetén már fennáll. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta \Vdash p \supset q &\Leftrightarrow \text{minden } \Delta' \supseteq \Delta \text{ esetén } \Delta' \Vdash p \Rightarrow \Delta' \Vdash q \\ &\Leftrightarrow \text{minden } \Delta' \supseteq \Delta \text{ esetén } p \in \Delta' \Rightarrow q \in \Delta' \\ &\Leftrightarrow^* \text{minden } \Delta' \supseteq \Delta \text{ esetén } (p \supset q) \in \Delta' \\ &\Leftrightarrow (p \supset q) \in \Delta \end{aligned}$$

Egyedül a $\Leftrightarrow *$ ekvivalencia szorul igazolásra, annak is csupán az egyik iránya. Tegyük fel tehát, hogy valamely $\Delta' \supseteq \Delta$ esetén $p \supset q \notin \Delta'$. Mivel ekkor $\Delta' \cup \{p\} \nvdash q$, az előző lemma szerint van olyan $\Delta'' \in P_\Gamma$, amelynek q nem eleme, de amelyre teljesül $\Delta' \cup \{p\} \subseteq \Delta''$.

A többi logikai konstansra vonatkozóan az indukciós lépés bizonyítása nem okoz gondot.

(2) $\Gamma \vdash m \Rightarrow m \in \Delta$ nyilván minden $\Delta \in P_\Gamma$ esetén fennáll, amiből $\mathfrak{M}_\Gamma \models m$. Ha pedig $\Gamma \nvdash m$, akkor van olyan $\Delta \in P_\Gamma$, amelynek m nem eleme. Ekkor (1) szerint $\Delta \nVdash m$, így aztán $\mathfrak{M} \nvDash m$. □

10.3.4. Egészítsük ki a lemma bizonyítást.

A teljességi tétel bizonyítása: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models m$. Mivel az $\mathfrak{M}_\Gamma$ modellben Γ minden eleme érvényes, azért fennáll $\mathfrak{M}_\Gamma \models m$, és az előző lemma (2) pontja szerint $\Gamma \vdash m$ is. □